

数学及力学演習I(1)

2010 10/7 (宇田川)

1. Taylor 展開

次の式を括弧で示した点の周りで Taylor 展開せよ。

(1) $\frac{x+2}{x(x-2)}$ ($x=1$)

(3) $\log(1-x)$ ($x=0$)

(2) $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ ($x=0$)

(4) $\sin^{-1} x$ ($x=0$)

$y = \sin^{-1} x$

$x = \sin y$

$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-x^2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2. 指数関数と三角関数の積分

次の二つの方法を用いて、 $C \equiv \int_0^{\infty} dx e^{-ax} \cos(bx)$ と $S \equiv \int_0^{\infty} dx e^{-ax} \sin(bx)$ を求めよ。

(1) 部分積分を用いる。

(2) $\int_0^{\infty} dx e^{-ax} e^{ibx}$ を積分する。

3. ガウス積分

次の積分の値を求めたい。

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2}$$

(1)

(1) $\int_0^{\infty} dr r e^{-ar^2}$ を求めよ。

(2) 積分 $J = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-a(x^2+y^2)}$ について、 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ と変数変換する事により、

$$J = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dr r e^{-ar^2} \text{ と書き直せる事を示せ。}$$

(3) 積分 I の値を求めよ。

4. 有理関数の積分

次の積分の値を求めよ。

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{a^2 + x^2}$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{(a^2 + x^2)^n}$

5. 行列の指数関数

次の行列 A について、 e^{xA} を求めよ。 x は実数とする。

(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

6. Jordan 標準形

行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$ について、以下の問いに答えよ。

(1) Jordan 標準形 J を求めよ。

(2) e^{xJ} を求めよ。

(3) e^{xA} を求めよ。

$e^{\lambda A}$
 $e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \lambda^n$

$\cos \lambda = 1 - \frac{1}{2!} \lambda^2$

$\sin \lambda = \lambda - \frac{1}{3!} \lambda^3$

$\frac{1}{i} \sin \lambda = \cos \lambda$

$\sin i \lambda = i (1 - \frac{1}{2!} \lambda^2)$

e

$e^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$