1.10/17

Date . . No.

1.

(1) $f(x)=\dfrac{x+2}{x(x-2)}=\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x}$ より、 ⟶ 部分分数分解

$$f^{(n)}(x)=2\cdot(-1)\cdots(-n)\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n+1)}-(-1)\cdots(-n)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{n+1}$$

$$f^{(n)}(1)=2(-1)^n\cdot n!\cdot(-1)^{n+1}-(-1)^n\cdot n! \quad =(-2-(-1)^n)n!$$

したがって、

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}-(2+(-1)^n)x^n=-3-x-3x^2-x^3-\cdots\cdots$$

(2) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ より、

$$f^{(n)}(x)=\left(+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(+\frac{2n-1}{2}\right)\cdot(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}$$

$$f^{(n)}(0)=2^{-n}\cdot(2n-1)!!$$

したがって!

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!\cdot 2^n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^n=1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2+\frac{5}{16}x^3\cdots$$

(3) $f(x)=\log(1-x)=\displaystyle\int\frac{1}{x-1}dx$

$$=\int-(1+\cdots+x^{n-1}+\cdots)\,dx=-\int\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,dx$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\int x^n\,dx$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}x^n$$

(4) $f(x)=\sin^{-1}(x)=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ (2)の結果を用いた。

$$=\int\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\int\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}=x+\frac{1}{6}x^2+\cdots$$

No. Date

2.

(1) 省略、部分積分すれば良い。

(2)

$$\int_0^\infty e^{-ax} e^{ibx} dx = \int_0^\infty e^{-(a-ib)x} dx = -\frac{1}{a-ib}\left[e^{(-a+ib)x}\right]_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{a-ib}\left[e^{-ax}(\cos(bx)+i\sin(bx))\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{a-ib} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2}$$

$$= C + iS$$

より

$$C = \frac{a}{a^2+b^2},\quad S = \frac{b}{a^2+b^2}$$ //

3. あんまり厳密じゃない…

(1)

$$\int_0^\infty r e^{-ar^2} dr = \left[-\frac{1}{2a} e^{-ar^2}\right]_0^\infty = \frac{1}{2a}$$ //

(2) $$J = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dx\, dy\, e^{-a(x^2+y^2)} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} dr\, d\theta \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} e^{-ar^2}$$

$$= \int_0^r r e^{-ar^2} dr \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2a} \rightarrow \text{(1)を用いた。}$$

$$\text{q.e.d} = \frac{\pi}{a}$$

(3)

$$J = \int_{-\infty}^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy\ e^{-ax^2} \cdot e^{-ay^2} = \left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx\right\}\left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-ay^2} dy\right\}$$

$$= \left\{\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2} dx\right\}^2 = I^2 = \frac{\pi}{a} \quad \therefore I = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$ //

4.

(1) arctan 使ってもいいし、ふつーに置き換えてもよい!

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\arctan\frac{x}{a}\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{a}$$ //

と思ったけど けっこうできなきゃいけないみたい…
「ご冗談でしょうファインマンさん」
でてくる「積分の中で微分」ての
はこれのことな気がする。

(2) ☆ こんな発想できるわけねーよ…参考…

$a^2=\lambda$ とおいて、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+x^2)^n}\,dx \quad -①$$

ところで、

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\frac{1}{\lambda+x^2}\right) = (-1)\cdots(-(n-1))\cdot\frac{1}{(\lambda+x^2)^n} \quad \therefore \frac{1}{(\lambda+x^2)^n} = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\frac{1}{\lambda+x^2}\right)$$

より

$$① = \int_{-\infty}^{\infty} (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\frac{1}{\lambda+x^2}\right)dx = (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\lambda+x^2}\,dx$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\frac{\pi}{a}\right)$$

また、

$$\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)\cdot\lambda^{-\frac{2n-1}{2}} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\cdot\lambda^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$= (-1)^{n-1}\cdot\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}}\cdot a^{-(2n-1)}$$

より

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\pi\cdot a^{-(2n-1)}$$ //

4 (2)の別解、ウォリス積分を利用.

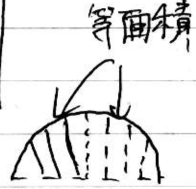
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^{2n}(1+\tan^2\theta)^n}\,\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{a^{2n-1}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta\,d\theta = \frac{2}{a^{2n-1}}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1}\theta\,d\theta}_{\text{ウォリス積分}}$$

ここで次のことを示す。

[ウォリス積分]

$$\boxed{\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\theta\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1}\theta\,d\theta &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}\theta\,d\theta = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \end{aligned}}$$



それぞれ(第1項)=(第2項)は対称性より明らか

求める積分をI_nなどと置いて、

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\,d\theta$$

部分積分

$$= \Big[-\cos\theta \cdot \sin^{n-1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,\sin^{n-2}\theta\,d\theta$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\theta)\sin^{n-2}\theta\,d\theta = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

$$\therefore\ \underline{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$$

ここで、$I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$ に注意すれば、

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot \cdots \cdot \frac{1}{2}\cdot I_0 = \frac{\pi}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot \cdots \cdot \frac{2}{3}\cdot I_1 = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

以上より示した。

これを用いれば、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(a^2+x^2)^n}\,dx = \underline{\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}\,\frac{\pi}{a^{2n-1}}}\ /\!/$$

5、 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots$ を用いる！

授業では、対角化でやってたけど、ここでは違うやり方するよ〜

(1)

$$e^{xA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n$$

$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に注意して、

$$e^{xA} = \sum_{\substack{n=0 \\ n \in 奇}}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \in 偶}}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \cdots & x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \\ x + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots & 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(ix) & i\sin(ix) \\ i\sin(ix) & \cos(ix) \end{pmatrix}$$

(2) $A = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ より、$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$、$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に注意して、

$$e^{xA} = e^{2xC + xD} = e^{2xC} \cdot e^{xD}$$

$$e^{2xC} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (2x)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sum \frac{1}{n!}(2x)^n & 0 \\ 0 & \sum \frac{1}{n!}(2x)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix}$$

より、

$$A = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos ix & -i\sin ix \\ -i\sin ix & \cos ix \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} e^{2x}\cos(ix) & -ie^{2x}\sin(ix) \\ -ie^{2x}\sin(ix) & e^{2x}\cos(ix) \end{pmatrix}} \,/\!/$$

☆ 2×2次の正方行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}、\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

の線形結合でかける。

Date . . No.

6

(1) $|xI-A|=(x-2)^2$ → 根 $x=2$

$$\begin{pmatrix}2&1\\-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$$

$\vec{p_1}={}^t(1,2)$ ととると、$(2I-A)\vec{p_1}=\vec{0}$.

これに対し、

$$(2I-A)\vec{p_2}=\vec{p_1}$$

を求めると、

$$\vec{p_2}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

より、$x=1$ として、 $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ をとる。

以上より、$A\vec{p_1}=2\vec{p_1}$、$A\vec{p_2}=\vec{p_1}+2\vec{p_2}$

$$A(\vec{p_1}\ \vec{p_2})=(A\vec{p_1}\ A\vec{p_2})=(2\vec{p_1}\ \ \vec{p_1}+2\vec{p_2})$$
$$=(\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

より $P=\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}$ と定めると、$AP=P\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$

なので $J=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ が Jordan 行列

☆ そもそも、固有値2のじてんで $\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$ か $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$ しかない

(2) $J=2\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$,

$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$D=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ とおくと、

$$e^{xJ}=e^{2xC}\cdot e^{xD}.$$

$$e^{2xC}=\begin{pmatrix}e^{2x}&0\\0&e^{2x}\end{pmatrix},\quad e^{xD}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2x\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x\\0&1\end{pmatrix}$$

より、

$$e^{xJ}=\begin{pmatrix}e^{2x}&0\\0&e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2x\\0&1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}e^{2x}&2xe^{2x}\\0&e^{2x}\end{pmatrix}}\ //$$

(3) $A=PJP^{-1}$ より、

$$e^{xA}=e^{xPJP^{-1}}=\sum\frac{x^n}{n!}(PJP^{-1})^n=\sum\frac{x^n}{n!}PJ^nP^{-1}=P\left(\sum\frac{x^n}{n!}J^n\right)P^{-1}$$
$$=P\begin{pmatrix}e^{2x}&2xe^{2x}\\0&e^{2x}\end{pmatrix}P^{-1}$$
$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{2x}&2xe^{2x}\\0&e^{2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\2&1\end{pmatrix}=\underline{\begin{pmatrix}\frac{2}{3}(2x+1)e^{2x}&\frac{2}{3}xe^{2x}\\-\frac{8}{3}xe^{2x}&-\frac{2}{3}xe^{2x}\end{pmatrix}}\ //$$